2. 行列

この章では行列のさまざまな演算について確認します。一般の行列・線形代数で扱われる演算のほかに、このプリントで特別に定義する演算も含みます。これらを理解すると数値データ処理の意味と利用法がわかり、応用範囲が広がります。また、少ないコードでプログラムが書けるのでプログラミング開発の能率が高まります。

手元の言語データから 1 つの数値、たとえば、ある地域(v1, v2, …, v5)に特有の語(d1, d2, d3, d4)の出現頻度が得られたとします。この 1 つの数字そのものが、異常に高い数値であるのか、または、ほかの地域でも多く見つかるのか、調べなければなりません。v1, v2, v3, …という地域で比較すると、その分布の特徴がわかります。さらに関連するほかの語 d1, d2, … の頻度も調べるとよいでしょう。そうすると地域と語からなる次のような頻度分布表が出来上がります。

O.S.	v1	v2	v3	v4	v5
d1	10	19	14	7	12
d2	11	7	10	0	1
d3	0	0	1	12	1
d4	0	1	2	3	3

以下では、このような頻度分布表の分析法を扱います。例としてあげた分布表は小さなものばかりですが、かなり大きな行列を扱うこともあります。

2.1. 単位ベクトルと単位行列

下左表のように成分がすべて 1 の縦ベクトルは「単位ベクトル」(unit vector, identity vector)とよばれます[1]。下右表は横に並んだ横ベクトルです。

I_{n1}	1
1	1
2	1

I_{1p}	1	2	3
1	1	1	1

このプリントは上左表のような縦ベクトルを n 行 1 列の行列 I_{n1} と見なし、上右表のような横ベクトルを 1 行 p 列の行列 I_{1p} とみなします。数値（スカラー）はたとえば M のように、添え字の n も p もつけません。

次のように「対角成分」（(1,1), (2,2)のように行番と列番が同じ位置の

[1] 「単位ベクトル」には他の定義もありますが、ここでは以下でよく使うこの定義（成分がすべて 1 のベクトル）を採用します。

成分）がすべて 1 で、非対角成分がすべて 0 である正方行列（行数と列数が同じ行列）は「単位行列」(unit matrix, identity matrix)とよばれます。以下では単位行列を I_{pp} のように表記します。一般に添え字の n, p は表記されませんが、これを意識すると理解が深まるのでこのプリントでは付記することにします。

I_{pp}	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

2.2. 行列の演算

2.2.1. 行列の加算と減算

行列間で対応する成分について加算と減算の演算をします。

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

+

Y_{np}	1	2
1	7	10
2	8	11
3	9	12

=

Z_{np}	1	2
1	8	14
2	10	16
3	12	18

$$X_{np} + Y_{np} = Z_{np},\ Z_{np} = A(X_{np}, Y_{np})$$

この加算の演算 $X_{np} + Y_{np} = Z_{np}$ は一般の行列演算で定義されています。上左式では、たとえば X_{np} のように大文字＋小文字＋小文字で行列を示し、小文字の添え字 n と p は行数と列数を示します。上右式 $Z_{np} = A(X_{np}, Y_{np})$ はプログラムのコードで、A は引数 1 (=X_{np})と引数 2 (=Y_{np})の和の行列を返すユーザー定義関数（プログラマーが作成する関数）です。以下では行列を返す関数を「行列関数」(matrix function)とよびます。

2.2.2. 行列と数値の積

行列（とベクトル）の成分全体に「スカラー」(scalar)とよばれる数値を掛けることができます。

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

*　5　=

Z_{np}	1	2
1	5	20
2	10	25
3	15	30

$$X_{np} * 5 = Z_{np},\ Z_{np} = M(X_{np}, 5)$$

2.3. 行列積

「**行列積**」(matrix product)は「**積和**」(sum product)という少し複雑な計算をしなければなりません。そこで以下では、簡単な「ベクトルとベクトルの積」からはじめて、少しずつ複雑になる「行列とベクトルの積」、「行列と行列の積」という順番で進みます。

2.3.1. ベクトルとベクトルの積

横ベクトルと縦ベクトルの積は、それぞれ対応する成分の積の和になります。たとえば次の例では、$X_{13}\ Y_{31}$ = 1*4 + 2*5 + 3 *6 = 32 になります。下左の行列計算では行列間に*や x などの演算記号（算術演算子）をつけません。下右の行列関数では X という関数名を使うことにします: $X(X_{13}, Y_{31})$。表と表の行列積を示すときは、2 つの表の間に×をつけることにします。

$X_{13}\ Y_{31} = Z,\ Z = X(X_{13}, Y_{31})$

X_{13}	1	2	3
1	1	2	3

×

Y_{31}	1
1	4
2	5
3	6

=

Z_{11}	1
1	1*4 + 2*5 + 3*6

=

Z_{11}	1
1	32

●縦ベクトルと横ベクトルの積

逆に、縦ベクトルと横ベクトルを掛け合わせると、それぞれの成分の積からなる行列になります。たとえば、$Y_{31}\ X_{13}$ の積の行列 Z_{33} の第 1 行[4, 8, 12]は Y_{31} の Z1: 4 に X_{13} の[1, 2, 3]を掛けたものです。Z_{33} の第 2 行の[5, 10, 15]は Y_{31} の 5 に X_{13} の[1, 2, 3]を掛けたものです。

$X_{31}\ Y_{13} = Z_{33},\ Z_{33} = X(X_{31}, Y_{13})$

Y_{31}	1
1	4
2	5
3	6

×

X_{13}	1	2	3
1	1	2	3

=

$Y_{31}\ X_{13}$	1	2	3
1	4*1	4*2	4*3
2	5*1	5*2	5*3
3	6*1	6*2	6*3

=

$Y_{31}\ X_{13}$	1	2	3
1	4	8	12
2	5	10	15
3	6	12	18

この演算はあまり使うことはありませんが、やはり必要なときがあります。

2.3.2. 行列とベクトルの積

行列のそれぞれの行に縦ベクトルを掛けます。この計算はデータ行列に

重みベクトルを掛けた合成ベクトルを作るときに使います。

$X_{32}\ Y_{21} = Z_{31},\ Z_{31} = X(X_{32},\ Y_{21})$

X_{32}	1	2
1	1	2
2	3	4
3	5	1

×

Y_{21}	1
1	2
2	3

=

Z_{31}	1
1	1*2 + 2*3
2	3*2 + 4*3
3	5*2 + 1*3

=

Z_{31}	1
1	8
2	18
3	13

次のように、横ベクトルと行列の行列積の結果は、横ベクトルと行列の縦列の積和 (1*1 + 2*2 + 3*3 = 14) , (1*4 + 2*5 + 3*6 = 32)を成分とする行列になります。

$X_{13}\ Y_{32} = Z_{12},\ Z_{12} = X(X_{13},\ Y_{32})$

X_{13}	1	2	3
1	1	2	3

×

Y_{32}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

=

Z_{12}	1	2
1	1*1 + 2*2 + 3*3	1*4 + 2*5 + 3*6

=

Z_{12}	1	2
1	14	32

●行列と単位ベクトルの積

行列に単位ベクトル(I_{p1})を右から掛けると横和縦ベクトルが得られます。

X_{32}	1	2
1	1	2
2	3	4
3	5	1

×

I_{21}	1
1	1
2	1

=

Z_{31}	1
1	1*1 + 2*1
2	3*1 + 4*1
3	5*1 + 1*1

=

Z_{31}	1
1	3
2	7
3	6

行列に単位横ベクトル(I_{1p})を左から掛けると縦和横ベクトルが得られます。

I_{13}	1	2	3
1	1	1	1

×

X_{32}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

=

Z_{12}	1	2
1	1*1+1*2+1*3	1*4+1*45+1*6

=

Z_{12}	1	2
1	6	15

2.3.3. 行列と行列の積

行列 X_{np} と行列 Y_{pq} の積 Z_{nq} の成分 Z(i, j)は左行列の i 行と右行列の j 列の積和です。たとえば次の Z(1, 1)の成分は X の 1 行(1, 2)と Y の 2 列(9, 1)の積和(1*9 + 2*1 = 11)になります。

$X_{32}\ Y_{23} = Z_{33},\ Z_{33} = X(X_{32},\ Y_{23})$

X_{32}	1	2
1	1	2
2	3	4
3	5	1

×

Y_{23}	1	2	3
1	7	9	2
2	8	1	3

=

Z_{33}	1	2	3
1	1*7 + 2*8	1*9 + 2*1	1*2 + 2*3
2	3*7 + 4*8	3*9 + 4*1	3*2 + 4*3
3	5*7 + 1*8	5*9 + 1*1	5*2 + 1*3

=

Z_{33}	1	2	3
1	23	11	8
2	53	31	18
3	43	46	13

行列積は第1行列の列数(p)と第2行列の行数(p)が同じでなければ計算できません。行列積の結果の行列は第1行列の行数と第2行列の列数になります。次の式のそれぞれの添え字に注意してください。

$X_{np}\ Y_{pm} = Z_{nm}$

●行列積の交換

行列積 $X_{nn}\ Y_{nn}$ と、行列積 $Y_{nn}\ X_{nn}$ は異なることがふつうです。そこで、行列積の演算では「X_{nn} に Y_{nn} を右から掛ける($X_{nn}\ Y_{nn}$)」や「X_{nn} に Y_{nn} を左から掛ける($Y_{nn}\ X_{nn}$)」という表現が使われます。以下では「右から掛ける」「左から掛ける」のかわりに、それぞれ「右積する」「左積する」という表現を使うことにします。

●スカラーの移動

スカラー(S)は行列積のどの位置からも自由に移動することができます。つまり、スカラーは行列に右積しても左積してもその結果は同じです。このことはスカラーを行列の要素全体に掛けることから明らかです。

$S\ X_{np} = X_{np}\ S$

●単位行列の左積・右積

行列に単位行列(I_{pp})を右積しても左積してもその結果は元の行列は変わりません。この性質は重要です。

(a) $X_{pp}\ I_{pp} = X_{pp}$

X_{pp}	x	y	z
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

×

I_{pp}	x	y	z
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

=

X_{pp}	x	y	z
1	1*1+2*0+3*0	1*0+2*1+3*0	1*0+2*0+3*1
2	4*1+5*0+6*0	4*0+5*1+6*0	4*0+5*0+6*1
3	7*1+8*0+9*0	7*0+8*1+9*0	7*0+8*0+9*1

=

X_{pp}	x	y	z
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

(b) $I_{pp}\ X_{pp} = X_{pp}$

I_{pp}	x	y	z
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

×

X_{pp}	x	y	z
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

=

X_{pp}	x	y	z
1	1*1+0*4+0*7	1*2+0*5+0*8	1*3+0*6+0*9
2	0*1+1*4+0*7	0*2+1*5+0*8	0*3+1*6+0*9
3	0*1+0*4+1*7	0*2+0*5+1*8	0*3+0*6+1*9

=

X_{pp}	x	y	z
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

●行列積の計算表

小林(1967:10)は行列積の計算のために次のような「計算表」を使うことを勧めています。

1	2
3	4

×

5	6
7	8

=

1*5 + 2*7 = 19	1*6 + 2*8 = 22
3*5 + 4*7 = 43	3*6 + 4*8 = 50

計算表：

×			
		5	6
		7	8
1	2	1*5 + 2*7 = 19	1*6 + 2*8 = 22
3	4	3*5 + 4*7 = 43	3*6 + 4*8 = 50

上の計算表を使って、行列積の左の行列は左から右に行方向に進み、右の行列は上から下に列方向に進みながら、それぞれに対応する成分の積を足していきます。

この計算法は次のようなベクトルと行列の積についても同様です。

1 2	×	5 6	=	1*5 + 2*7 = 19	1*6 + 2*8 = 22	
		7 8				

計算表：

×		5	6
		7	8
1	2	1*5 + 2*7 = 19	1*6 + 2*8 = 22

1 2	×	5	=	1*5 + 2*7 = 19	1*6 + 2*8 = 22
3 4		7		3*5 + 4*7 = 43	3*6 + 4*8 = 50

計算表：

×		5
		7
1	2	1*5 + 2*7 = 19
3	4	3*5 + 4*7 = 43

2.4. 転置行列

行列の**転置**(transposition)とは行列の成分 X(i,j)を X(j,i)と交換することです。行列 X_{np} の転置行列(transposed matrix)は X_{np}^T と表記されます[2]。

X_{n1}	1
1	1
2	2
3	3

X_{n1}^T	1	2	3
x	1	2	3

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

X_{np}^T	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6

転置行列には次の性質があります。これらはよく使う演算です。

[2] 転置行列を示すために，次のように単純にダッシュ(')が使われることがあります：X'。

(a) $(X_{np}{}^{T})^{T} = X_{np}$

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

→

$X_{np}{}^{T}$	1	2	3
x	1	2	3
y	4	5	6

→

$(X_{np}{}^{T})^{T}$	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

(b) $(X_{np} + Y_{np})^{T} = X_{np}{}^{T} + Y_{np}{}^{T}$

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

+

Y_{np}	1	2
1	7	10
2	8	11
3	9	12

=

Z_{np}	1	2
1	8	14
2	10	16
3	12	18

→

$Z_{np}{}^{T}$	1	2	3
1	8	10	12
2	14	16	18

$X_{np}{}^{T}$	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6

+

$Y_{np}{}^{T}$	1	2	3
1	7	8	9
2	10	11	12

=

Z_{np}	1	2	3
1	8	10	12
2	14	16	18

(c) $(X_{np}\ Y_{pm})^{T} = Y_{pm}{}^{T}\ X_{np}{}^{T}$

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

×

Y_{p1}	x
1	1
2	2

=

Z_{n1}	x
a	9
b	12
c	15

→

$Z_{n1}{}^{T}$	1	2	3
1	9	12	15

$Y_{p1}{}^{T}$	1	2
1	1	2

×

$X_{np}{}^{T}$	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6

=

Z_{1n}	1	2	3
1	9	12	15

＊線形代数の基礎（行列・ベクトル）については次を参照しました：足立(2005)，井上(1998)，井上・広川(2000)，三野(2001)，奥村(1986)，小林(1967)，芝(1975)，白井(2009)，縄田(1999)，長谷川(2001)。「単位ベクトル」の定義については芝(1975)に従いました。

2.5. 行列演算の拡張

以上が厳密な線形代数の枠組みの中での基本的な行列演算です。このテキストでもこれらの演算を活用しますが、さらに以下の「行列成分間の演算」を追加しておきます。これらは、行列計算が一般の数値計算と同じように行うことができるようにするためです。これらの成分間の演算を可能にする関数のプログラムを用意すれば演算が単純化し、その理解がスムー

ズになります。このような行列成分間の演算は計算の便宜という実際的な目的のために使うもので、厳密な線形代数の理論には含まれません。

2.5.1. 行列とスカラーの成分間の演算

次のような行列とスカラーの加算・減算を可能にしておきます。

X_{np}	1	2	+	5	=	Z_{np}	1	2
1	1	4				1	6	9
2	2	5				2	7	10
3	3	6				3	8	11

$X_{np} + 5 = Z_{np}$, $Z_{np} = A(X_{np}, 5)$

線形代数の厳密な枠組みの中で、このような行列とスカラーの加算・減算をするには､次のようにスカラーに単位ベクトルを二重にかけて(縦単位ベクトルと横単位ベクトル)､相手の行列と同じ大きさにしてから足したり引いたりしなければなりません。

$X_{np} + 5 * I_{n1} * I_{1p} = Z_{np}$, $Z_{np} = A(X_{np}, X(X(5, I_{n1}), I_{1p}))$

以下では加算(+, A)や減算(-, S)だけでなく、積算(X, M)、除算(/, D)、指数(^, E)・対数(@, L)の演算も含めておきます。次のようなベクトルを対象にした場合も同様です。

X_{n1}	1	^	2	=	Z_{n1}	1
1	1				1	1
2	2				2	4
3	3				3	9

$X_{n1} \wedge 2 = Z_{n1}$, $Z_{n1} = E(X_{n1}, 2)$

●一様行列

先述のように、ベクトルは 1 列または 1 行の行列です。そして数値（スカラー）は 1 行 1 列の行列と見なすことができます。このように考えればさまざまな演算を、数値、ベクトル、行列という異なったデータどうしを統一して計算できるようになります。

ここで**一様行列**(homogeneous matrix)という概念を提案します。たとえば次のような行列＋数値の演算で、数値(5)を下の Y_{np} のような成分をもつ行列（「全体一様行列」homogeneous matrix in all をよびます）とすれば、一般に認められている行列の加算ができるようになります。

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

+ 5 =

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

+

Y_{np}	1	2
1	5	5
2	5	5
3	5	5

=

Z_{np}	1	2
1	6	9
2	7	10
3	8	11

そこで、行列成分演算では次のようにスカラーと全体一様行列は同等(~)と見なします。

5 ~

Y_{np}	1	2
1	5	5
2	5	5
3	5	5

2.5.2. 行列とベクトルの成分間の演算

次のような縦ベクトルを用いた演算では、列一様行列(homogeneous matrix in column)である Y_{np} を使えば、すべての演算が可能になります。

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

+

Y_{n1}	1
1	7
2	8
3	9

=

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

+

Y_{np}	1	2
1	7	7
2	8	8
3	9	9

=

Z_{np}	1	2
1	8	11
2	10	13
3	12	15

同様にして、次のような横ベクトルを用いた演算では、それを「行一様行列」(homogeneous matrix in row)にします。下の Y_{np} は 3 行一様行列です。

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

+

Y_{1p}	1	2
1	7	8

=

X_{np}	1	2
1	1	4
2	2	5
3	3	6

+

Y_{np}	1	2
1	7	8
2	7	8
3	7	8

=

Z_{np}	1	2
1	8	12
2	9	13
3	10	14

このようにベクトルを一様行列に変換するのは、行列演算を可能にするための方法に過ぎません。元のベクトルとそれぞれの一様行列の間に数値の本質的な変化はありません。

Y_{n1}	1
1	7
2	8
3	9

~

Y_{np}	1	2
1	7	7
2	8	8
3	9	9

Y_{1p}	1	2
1	7	8

~

Y_{np}	1	2
1	7	8
2	7	8
3	7	8

この一様行列を使うことによって、次のような演算も可能になります。

C	1	2
1	1	2

+

D	1
1	7
2	8
3	9

=

C	1	2
1	8	9
2	9	10
3	10	11

よって、これは次の演算と同じになります。

C	1	2
1	1	2
2	1	2
3	1	2

+

D	1	2
1	7	7
2	8	8
3	9	9

=

C	1	2
1	8	9
2	9	10
3	10	11

2.5.3. 行列と行列の要素間の演算

次は行列要素間の積算(*, M)を示します。M は対応する行列要素間の積を成分とする行列を返す行列関数です。この行列要素間の積算を「行列要素積」とよぶことにします。これは先の「行列積」(x, X)と異なりますから注意してください。

はじめに、行列の行の成分についての積を扱います。

X_{23}	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6

*

Y_{13}	1	2	3
1	1	2	3

=

Z_{23}	1	2	3
1	1	4	9
2	4	10	18

$X_{23} * Y_{13} = Z_{23},\ Z_{23} = M(X_{23}, Y_{13})$

ここで導入した行列成分間の演算では、2 つの行列の行数または列数が一致していれば可能です。次のように、小さい方の行列が相手の行列の行または列の大きさの一様行列に拡張されるからです。

X_{23}	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6

*

Y_{13}	**1**	**2**	**3**
1	**1**	**2**	**3**
2	**1**	**2**	**3**

=

Z_{23}	1	2	3
1	1	4	9
2	4	10	18

行列積を使ってこの演算をするには、次のように Y の対角行列(diag)を

用意して、X に右積します。

X_{23}	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6

x

Y_{33}	1	2	3
1	1	0	0
2	0	2	0
3	0	0	3

=

Z_{23}	1	2	3
1	1	4	9
2	4	10	18

X diag(Y) = Z, Z = X(X, diag(Y))

次は、行列の列の成分の積です。

X	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6

*

Y	1
1	5
2	6

=

Z	1	2	3
1	5	10	15
2	24	30	36

X * Y = Z, Z = M(X, Y)

Y	1	2
1	5	0
2	0	6

x

X	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6

=

M M	1	2	3
1	5	10	15
2	24	30	36

diag(Y) X = Z, Z = X(diag(Y), X)

このように、掛けるベクトル(Y)を対角化し、行列(X)に左積します。

行列成分間の割り算も同様です。

X	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6

/

Y	1	2	3
1	1	2	3

=

Z	1	2	3
1	1.0	1.0	1.0
2	4.0	2.5	2.0

X / Y = Z, Z = D(X, Y)

行列積を使えば

X	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6

x

Y	1	2	3
1	1.00	.00	.00
2	.00	.50	.00
3	.00	.00	.33

=

Z	1	2	3
1	1.00	1.00	1.00
2	4.00	2.50	2.00

ここで、Y の対角成分を 1, 2, 3 の逆数(1/1, 1/2, 1/3)にして(rev)、X に右積します。

X diag(rev(Y)) = Z, Z = X(X, diag(rev(Y)))

さらに、行列成分間を拡張させて、次のように同じ行数と列数の行列の成分間の積や商も計算可能にしておきます。

X_{np}	1	2	*	Y_{np}	1	2	=	Z_{np}	1	2
1	1	4		1	7	10		1	7	40
2	2	5		2	8	11		2	16	55
3	3	6		3	9	12		3	27	72

$X_{np} * Y_{np} = Z_{np},\ Z_{np} = M(X_{np}, Y_{np})$

2.5.4. 四則演算の一般化

以上のように考えれば、たとえば、X * Y = Z ならば（→）Y = Z / X である、というような一般の四則演算と同じようにして、行列成分の四則演算の導出も可能になります。この導出は数値どうしの演算、ベクトルどうしの演算、行列どうしの演算では次のようにします。

2 * 3 = 6 → 3 = 6 / 2

X_{n1}	1	*	Y_{n1}	1	=	Z_{n1}	1	→	Y_{n1}	1	=	Z_{n1}	1	/	X_{n1}	1
1	1		1	7		1	7		1	7		1	7		1	1
2	2		2	8		2	16		2	8		2	16		2	2
3	3		3	9		3	27		3	9		3	27		3	3

X_{n1}	1	2	*	Y_{n1}	1	2	=	Z_{n1}	1	2	→	Y_{n1}	1	2	=	Z_{n1}	1	2	/	X_{n1}	1	2
1	1	4		1	7	10		1	7	40		1	7	10		1	7	40		1	1	4
2	2	5		2	8	11		2	16	55		2	8	11		2	16	55		2	2	5
3	3	6		3	9	12		3	27	72		3	9	12		3	27	72		3	3	6

それでは、数値とベクトル、数値と行列、ベクトルと行列のような異種のデータ間でも同じように演算の導出が可能になるか、試してみましょう。

X	1	2	*	5	=	Z	1	2	→	5	=	Z	1	2	/	X	1	2	=	5	1	2
1	1	4				1	5	20				1	5	20		1	1	4		1	5	5
2	2	5				2	10	25				2	10	25		2	2	5		2	5	5
3	3	6				3	15	30				3	15	30		3	3	6		3	5	5

X	1	2	*	Y	1	=	Z	1	2	→	Y	1	=	Z	1	2	/	X	1	2	=	Y	1	2
1	1	4		1	7		1	7	28		1	7		1	7	28		1	1	4		1	7	7
2	2	5		2	8		2	16	40		2	8		2	16	40		2	2	5		2	8	8
3	3	6		3	9		3	27	54		3	9		3	27	54		3	3	6		3	9	9

上の最初の表の右端の行列 A は全体一様行列ですから、先述のように、数値（スカラー）(=5)と同じです。また、下の B は 2 列一様行列なので、1 列行列（縦ベクトル）の Y と同じです。よって、以上のすべての場合で X * Y = Z ならば、Y = Z / X であることが確認できました。このことは、乗算と除算の演算だけでなく、加算と減算の演算、指数と対数の演算でも同じです。

X の成分にゼロ(0)があると先の行列の割り算 Z / X ができなくなります。しかし、上の演算で X の成分が 0 ならば Z の対応成分も 0 になるので、0 / 0 という計算が行われます。この計算は一般にできないことになっていますが、これを 0 / 0 = 0 と決めておけば、これも可能になります。

なお、ここで導入した「一様行列」は、通常の行列計算では、次のように行列と単位ベクトルの行列積を使います。

X	1	x	I	1	2	=	H	1	2
1	4		1	1	1		1	4	4
2	5						2	5	5
3	6						3	6	6

$X_{n1}\ I_{1p} = H_{np}$

I	1		X	1	2		H	1	2
1	1		1	7	8		1	7	8
2	1						2	7	8

$I_{n1}\ X_{1p} = H_{np}$

このように四則演算を一般化すると、たとえば先述のベクトルの対角行列化(diag)や行列成分の逆数化(rev)なども簡単に導くことができます。

X_{31}	1	*	I_{13}	1	2	3	*	I_{33}	1	2	3	=	Y_{33}	1	2	3
1	1		1	1	1	1		1	1	0	0		1	1	0	0
2	2							2	0	1	0		2	0	2	0
3	3							3	0	0	1		3	0	0	3

$\mathrm{diag}(X_{31}) = X_{31} * I_{13} * I_{33} = Y_{33},\ Y = M(M(X_{31}, I_{13}), I_{33})$

$$1 \;/\; \begin{array}{|c|c|} \hline X_{31} & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ \hline \end{array} \;/\; \begin{array}{|c|c|} \hline X_{31} & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{31} & 1 \\ \hline 1 & 1.000 \\ 2 & 0.500 \\ 3 & 0.333 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathrm{rev}(X_{31}) = 1 \;/\; X_{31} = Y_{31}\ ,\ Y_{31} = D(1,\ X_{31})$$

2.6. 位置行列

一般に行列は下表(S1)のように行(h1, h2, ...)と列(v1, v2, ..)の 2 つの次元で示されます。これまでに扱った行列はこの形式です。

S1	v1	v2	v3	v4	v5
h1	10	19	14	7	12
h2	11	7	10	0	1
h3	0	0	1	12	1
h4	0	1	2	3	3

一方、下表(Shvc)のように、行(H)と列(V)の位置の後にセル(C)の値を示す形式も考えられます。これを「位置行列」(position matrix)とよびます。

Shvc	H	V	C
h1	1	1	10
h2	1	2	19
h3	1	3	14
h4	1	4	7
h5	1	5	12
h6	2	1	11
h7	2	2	7
h8	2	3	10
h9	2	4	0
h10	2	5	1
h11	3	1	0
h12	3	2	0
h13	3	3	1
h14	3	4	12
h15	3	5	1
h16	4	1	0
h17	4	2	1
h18	4	3	2
h19	4	4	3

h20	4	5	3

一般の行列と位置行列の情報は同じですが、行列計算には一般の行列を使います。一方、位置行列は Excel のフィルターやピボットテーブルを使うときに便利です。プログラムによって行列の形式を交互に変換することができます。